Théorie des types pour les ω-catégories monoidales

Samuel Mimram, Thibaut Benjamin

Ecole Polytechnique

Journées LHC - 16/10/2019

Idée générale

- CaTT(Finster et Mimram) : Théorie des types pour les ω-catégories faibles
  https://thiben.github.io/catt/

Idée générale

- CaTT(Finster et Mimram) : Théorie des types pour les ω-catégories faibles
  https://thiben.github.io/catt/

- Modifier les règles de la théorie pour décrire des ω-catégories monoidales

ω-catégories faibles

Ensemble globulaire

Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) :

Ensemble globulaire

Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) : $\bullet$
- de *flèches* (ou 1-*cellules*) : $\bullet \longrightarrow \bullet$

Ensemble globulaire

Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) : $\bullet$
- de *flèches* (ou 1-*cellules*) : $\bullet \longrightarrow \bullet$
- de 2-*cellules* : $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$

Ensemble globulaire

Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) : $\bullet$
- de *flèches* (ou 1-*cellules*) : $\bullet \longrightarrow \bullet$
- de 2-*cellules* : $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$
- de 3-*cellules* $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Rrightarrow \Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$

Ensemble globulaire

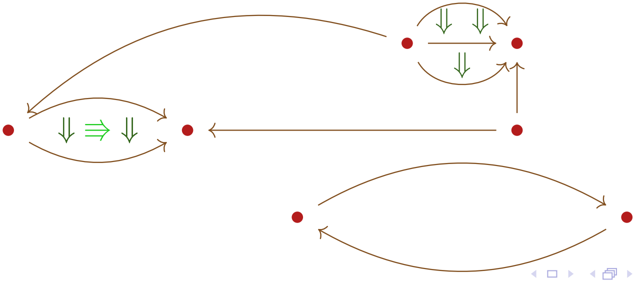
Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) : $\bullet$
- de *flèches* (ou 1-*cellules*) : $\bullet \longrightarrow \bullet$
- de 2-*cellules* : $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$
- de 3-*cellules* $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Rrightarrow \Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$
- etc

Ensemble globulaire

Un ensemble globulaire est constituée

- de *points* (ou *objets*) : $\bullet$
- de *flèches* (ou 1-*cellules*) : $\bullet \longrightarrow \bullet$
- de 2-*cellules* : $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$
- de 3-*cellules* $\begin{tikzcd}[column sep=huge] \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Rrightarrow \Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$
- etc



Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

- 2-cellules :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=A, below}] \arrow[r, ""{name=B, above}, ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=A, to=B] \arrow[Rightarrow, from=C, to=D] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=B, above}] & \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=A, to=B] \arrow[Rightarrow, from=C, to=D] \end{tikzcd}$$

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, bend left=60] \arrow[rr] \arrow[rr, bend right=60] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow"] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow"] & & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

- etc

… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches : $$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dotted] & \bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend right, dotted] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

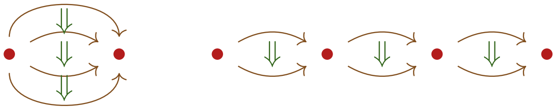
… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



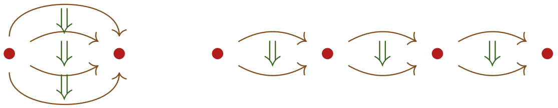
… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

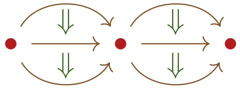
- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



- loi d'échange :

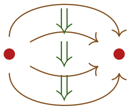


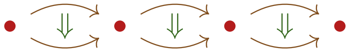
Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

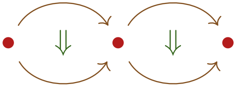
$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :





- loi d'échange :

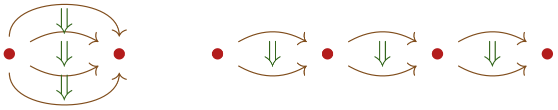


Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

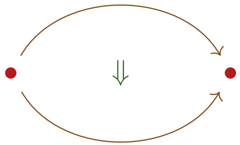
- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



- loi d'échange :



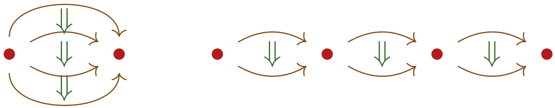
… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

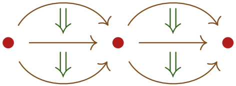
- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



- loi d'échange :

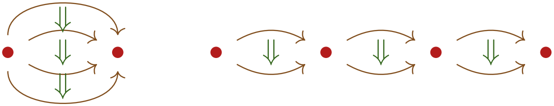


Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

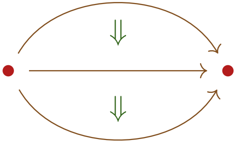
- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



- loi d'échange :



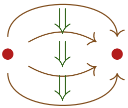
... associatives ...

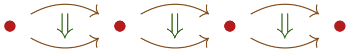
Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

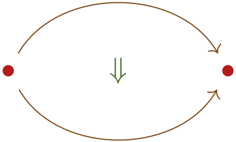
$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :





- loi d'échange :

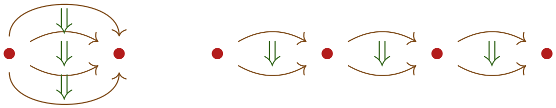


Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

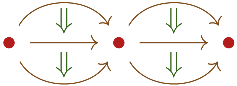
- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :



- loi d'échange :



- etc

... faiblement !

Toutes les "égalités", mentionnées précédemment sont faibles

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[r, bend right, "(h\circ g)\circ f"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow \quad \Uparrow^{\beta}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

Ils sont ordonnés et sans trous

Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

  Ils sont ordonnés et sans trous

- Exemples

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

  Ils sont ordonnés et sans trous

- Exemples

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D] \end{tikzcd}$$

- Contre-exemples

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, bend left=10, ""{name=M1}] \arrow[r, bend right=10, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=M1] \arrow[Rightarrow, from=M2, to=D] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

Ils sont ordonnés et sans trous

- Définition inductive

$$\text{Diagrame de composition} \quad = \quad \begin{cases} \text{- un objet} \\ \text{- une liste d'objets avec des diagram-} \\ \quad \text{mes de composition entre chaque} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

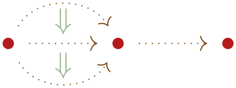
Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

Ils sont ordonnés et sans trous

- Définition inductive

Diagrame de composition $=$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{- un objet} \\ \text{- une liste d'objets avec des diagrammes de composition entre chaque} \end{array} \right.$



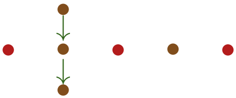
Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

Ils sont ordonnés et sans trous

- Définition inductive

$$\text{Diagrame de composition} \quad = \quad \begin{cases} \text{- un objet} \\ \text{- une liste d'objets avec des diagrammes de composition entre chaque} \end{cases}$$



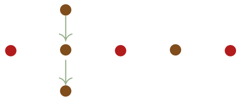
Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

  Ils sont ordonnés et sans trous

- Définition inductive

$$\text{Diagrame de composition} \quad = \quad \begin{cases} \text{- un objet} \\ \text{- une liste d'objets avec des diagram-} \\ \quad \text{mes de composition entre chaque} \end{cases}$$



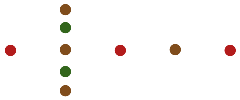
Diagrammes de composition

- Ce sont les diagrammes qui représente une façon non ambigue de composer

  Ils sont ordonnés et sans trous

- Définition inductive

  Diagrame de composition $=$ { - un objet
  - une liste d'objets avec des diagrammes de composition entre chaque



Définition "formelle"

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

Définition "formelle"

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

- "Associativités" générales :
  Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales

La théorie CaTT

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Nom de la cohérence

`comp`

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Diagramme

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Nom de la cohérence

`comp`

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Type de retour

$$x \longrightarrow z$$

Diagramme

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Nom de la cohérence

`comp`

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad \rightsquigarrow \quad x \xrightarrow{\texttt{comp f g}} z$$

Composition des flèches

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad \rightsquigarrow \quad x \xrightarrow{\texttt{comp f g}} z$$

Composition des flèches

```
coh id (x:*) : x->x
```

Premiers Exemples

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad \rightsquigarrow \quad x \xrightarrow{\texttt{comp f g}} z$$

Composition des flèches

```
coh id (x:*) : x->x
```

$$x \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} x \arrow[loop above, "\texttt{id}\ x"] \end{tikzcd}$$

Identité des objets

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\rightarrow$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \rightarrow u}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\rightarrow$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \rightarrow u}$$

- d'un type $\Rightarrow$ pour les 2-cellules :

$$\frac{\Gamma \vdash f : t \rightarrow u \qquad \Gamma \vdash g : t \rightarrow u}{\Gamma \vdash f \Rightarrow g}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\rightarrow$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \rightarrow u}$$

- d'un type $\Rightarrow$ pour les 2-cellules :

$$\frac{\Gamma \vdash f : t \rightarrow u \qquad \Gamma \vdash g : t \rightarrow u}{\Gamma \vdash f \Rightarrow g}$$

- etc

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

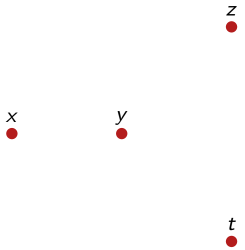
$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\to$ pour les $\geq$ 1-cellules

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t \underset{A}{\to} u}$$

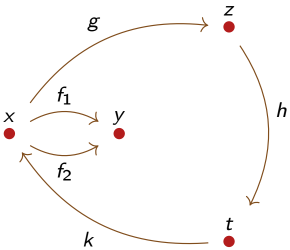
Les contextes sont des diagrammes !

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} x : \star, \qquad y : \star, \qquad z : \star, \qquad t : \star \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$



Les contextes sont des diagrammes !

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{lllll} x : \star, & y : \star, & z : \star, & t : \star & \\ f_1 : x \xrightarrow[\star]{} y, & f_2 : x \xrightarrow[\star]{} y, & g : x \xrightarrow[\star]{} z, & h : z \xrightarrow[\star]{} t, & k : t \xrightarrow[\star]{} x \\ & & & & \end{array} \right.$$



Les contextes sont des diagrammes !

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{lllll}
x : \star, & y : \star, & z : \star, & t : \star & \\[1.5em]
f_1 : x \xrightarrow[\star]{} y, & f_2 : x \xrightarrow[\star]{} y, & g : x \xrightarrow[\star]{} z, & h : z \xrightarrow[\star]{} t, & k : t \xrightarrow[\star]{} x \\[1.5em]
\alpha : f_1 \xrightarrow[x \xrightarrow[\star]{} y]{\qquad} f_2 & & & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & z \arrow[d, bend left, "h"] \\
x \arrow[urr, bend left, "g"] \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y & \\
& & t \arrow[ull, bend left, "k"]
\end{tikzcd}
$$

Contextes de composition

- Ce sont les contextes qui correspondent à des diagrammes de composition

Correspondent à un jugement $\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$

Contextes de composition

- Ce sont les contextes qui correspondent à des diagrammes de composition

  Correspondent à un jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

- Ce jugement est décidable, à l'aide d'un algorithme

$$\frac{}{x : \star \vdash_{\mathrm{ps}} x : \star} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} x : A}{\Gamma, y : A, f : x \underset{A}{\longrightarrow} y \vdash_{\mathrm{ps}} f : x \underset{A}{\longrightarrow} y}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} f : x \underset{A}{\longrightarrow} y}{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} y : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} x : \star}{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}}$$

Source et but

- Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)
  Intuitivement, le résultat de la composition va de la source du diagramme vers son but

Source et but

- Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)
  Intuitivement, le résultat de la composition va de la source du diagramme vers son but
- Exemple :

Γ

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

Source et but

- ▷ Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)
  Intuitivement, le résultat de la composition va de la source du diagramme vers son but
- ▷ Exemple :

$$\begin{tikzcd}
\partial^-(\Gamma) & x \arrow[r, bend left, "f_1"] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, squiggly] & z \\
\Gamma & x \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[r, bend right, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & z
\end{tikzcd}$$

Source et but

- Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)
  Intuitivement, le résultat de la composition va de la source du diagramme vers son but
- Exemple :

$$
\begin{tikzcd}
\partial^-(\Gamma) & x \arrow[r, bend left, "f_1"] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, squiggly] & z \\
\Gamma & x \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & z \\
\partial^+(\Gamma) & x \arrow[r, bend right, "f_3"'] & y \arrow[r, "g"] \arrow[u, squiggly] & z
\end{tikzcd}
$$

Interprétation de la théorie des types

- Un terme $\Gamma \vdash t : A$ représente la composition de certaines cellules de Γ

  Plus précisément : une cellule dans l'ω-catégorie librement engendrée par le graphe Γ

Interprétation de la théorie des types

- Un terme $\Gamma \vdash t : A$ représente la composition de certaines cellules de Γ

  Plus précisément : une cellule dans l'ω-catégorie librement engendrée par le graphe Γ

- Cas des contextes de composition $\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash t : A \\ \mathrm{Var}(t) \cup \mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(\Gamma) \end{array}\right\}$$

t est une manière de composer entièrement le contexte de composition Γ

Interprétation de la théorie des types

- Un terme $\Gamma \vdash t : A$ représente la composition de certaines cellules de Γ

  Plus précisément : une cellule dans l'ω-catégorie librement engendrée par le graphe Γ

- Cas des contextes de composition $\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash t : A \\ \mathrm{Var}(t) \cup \mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(\Gamma) \end{array}\right\}$$

t est une manière de composer entièrement le contexte de composition Γ

On note $\Gamma \vdash_{\mathsf{Var}} t : A$ lorsque c'est le cas

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

- Règle pour générer les témoins de telles compositions :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

- Règle pour générer les témoins de telles compositions :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash_{\mathrm{Var}} t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash_{\mathrm{Var}} u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

- Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\rightarrow} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\rightarrow} z$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{comp} : x \rightarrow z$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales : **Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales**

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales : **Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales**

- Règle pour générer les témoins de telles associativités :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales : **Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales**
- Règle pour générer les témoins de telles associativités :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

- Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\longrightarrow} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\longrightarrow} z, w : \star, h : z \underset{\star}{\longrightarrow} w$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{assoc} : \mathtt{comp\ f\ (comp\ g\ h)} \to \mathtt{comp\ (comp\ f\ g)\ h}$$

Exemples

- Composition des morphismes

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z
```

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad \rightsquigarrow \quad x \xrightarrow{\texttt{comp}\ f\ g} z$$

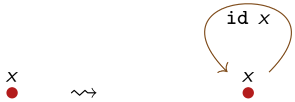
Exemples

- Composition des morphismes

  `coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z`

- Identité

  `coh id (x:*) : x->x`



Exemples

- Composition des morphismes

  `coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z`

- Identité

  `coh id (x:*) : x->x`

- Associativité

  `coh assoc (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) (w:*)(h:z->w) : co`
  `(comp f g) h -> comp f (comp g h)`

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "g"] & z \arrow[r, "h"] & w
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "\mathtt{comp}\ (\mathtt{comp}\ f\ g)\ h"] \arrow[r, bend right, "\mathtt{comp}\ f\ (\mathtt{comp}\ g\ h)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & z
\end{tikzcd}
$$

ω-categories faibles monoidales

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

- qui est fonctoriel...

$$\forall f : y \to z, \qquad x \otimes f : x \otimes y \to x \otimes z$$

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

- qui est fonctoriel...

$$\forall f : y \to z, \qquad x \otimes f : x \otimes y \to x \otimes z$$

- compatible avec la composition...

$$(x \otimes g) \circ (x \otimes f) = x \otimes (g \circ f)$$

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

- qui est fonctoriel...

$$\forall f : y \to z, \qquad x \otimes f : x \otimes y \to x \otimes z$$

- compatible avec la composition...

$$(x \otimes g) \circ (x \otimes f) = x \otimes (g \circ f)$$

- transporte aussi les 2 cellules...

$$\forall \alpha : f \Rightarrow g, \qquad x \otimes \alpha : x \otimes f \Rightarrow x \otimes g$$

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

- qui transporte les cellules de toutes les dimensions, de manière compatible avec toutes les cohérences

Definition ?

- C'est une ω-catégorie C avec un produit sur les objets ...

$$\forall x, y \in C_0, \qquad x \otimes y \in C_0$$

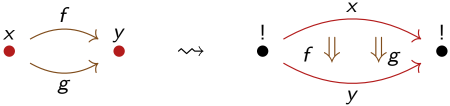
- qui transporte les cellules de toutes les dimensions, de manière compatible avec toutes les cohérences
  Comment gérer toutes ces cohérences en une seule définition ?

Solution

- Une ω-catégorie monoidale C est une ω-catégorie C^{-} avec un seul objet

Solution

- Une ω-catégorie monoidale C est une ω-catégorie C^- avec un seul objet
  Les objets de C sont les flèches de C^-, les flèches de C sont les 2-cellules de C^- ...



Solution

- Une ω-catégorie monoidale C est une ω-catégorie C^- avec un seul objet
  Les objets de C sont les flèches de C^-, les flèches de C sont les 2-cellules de C^- ...

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} ! \arrow[rr, bend left=50, "x"] \arrow[rr, bend right=50, "y"'] \arrow[r, phantom, "f \Downarrow"] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & ! \end{tikzcd}$$

- Le produit tensoriel de C est la composition des flèches de C^-

$$x \qquad\qquad y \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} ! \arrow[r, "x"] & ! \arrow[r, "y"] & ! \end{tikzcd}$$

Solution

- Une ω-catégorie monoidale C est une ω-catégorie C^- avec un seul objet
  Les objets de C sont les flèches de C^-, les flèches de C sont les 2-cellules de C^- ...

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & \overset{y}{\bullet} \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \overset{!}{\bullet} \arrow[r, bend left=50, "x"] \arrow[r, bend right=50, "y"'] \arrow[r, phantom, "f \Downarrow \quad \Downarrow g"] & \overset{!}{\bullet} \end{tikzcd}$$

- Le produit tensoriel de C est la composition des flèches de C^-

$$\overset{x}{\bullet} \qquad \overset{y}{\bullet} \quad \rightsquigarrow \quad \overset{!}{\bullet} \xrightarrow{x} \overset{!}{\bullet} \xrightarrow{y} \overset{!}{\bullet}$$

Les cohérences du produit tensoriel de C proviennent des cohérences de la composition dans C^-

Comment formaliser cela ?

- Imaginons un "objet virtuel de dimension -1"
  On fait comme si un tel objet existait et on donne la définition d'une ω-catégorie faible avec un tel objet

Comment formaliser cela ?

- Imaginons un "objet virtuel de dimension -1"
  On fait comme si un tel objet existait et on donne la définition d'une ω-catégorie faible avec un tel objet

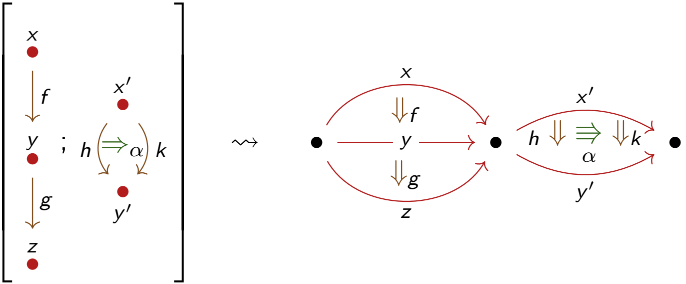
- Enlevons toutes les références à l'objet virtuel dans la théorie
  On obtient une théorie qui formellement fait tout comme si il y avait un unique objet de dimension -1

Diagrammes de compositions monoidaux

- Ce sont les diagrammes de compositions qui passent secrètement par l'objet virtuel.

Diagrammes de compositions monoidaux

- Ce sont les diagrammes de compositions qui passent secrètement par l'objet virtuel.
- Ils sont représentés par des listes de diagrammes de compositions



Pour les catégories monoidales

- Existence des compositions et du produit monoidal :
  Tout diagramme de composition monoidal est composable

Pour les catégories monoidales

- Existence des compositions et du produit monoidal :
  Tout diagramme de composition monoidal est composable

- "Associativités" générales et cohérences du produit monoidal :
  Toutes les façons de composer un même diagramme de composition monoidal sont faiblement égales

En théorie des types

- Jugement $\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}}$
  La liste $\overline{\Gamma}$ est un contexte de composition monoidal

En théorie des types

- Jugement $\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}}$
  La liste $\overline{\Gamma}$ est un contexte de composition monoidal

- Pour tout contexte de composition monoidal, $\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{Var}} t : A$
  t est une composition complète de $\overline{\Gamma}$ - NB : condition sur les variable + condition sur l'ordre des variables

En théorie des types

- Jugement $\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}}$
  La liste $\overline{\Gamma}$ est un contexte de composition monoidal

- Pour tout contexte de composition monoidal, $\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{Var}} t : A$
  t est une composition complète de $\overline{\Gamma}$ - NB : condition sur les variable + condition sur l'ordre des variables

- Source et but des contextes de compositions monoidaux

$$\partial^{-}(\overline{\Gamma}) \qquad \partial^{+}(\overline{\Gamma})$$

En théorie des types

- Cohérences d'opération

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\overline{\Gamma}) \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \partial^+(\overline{\Gamma}) \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\overline{\Gamma} \vdash \mathsf{coh}_{\overline{\Gamma}, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

En théorie des types

- Cohérences d'opération

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\overline{\Gamma}) \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \partial^+(\overline{\Gamma}) \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\overline{\Gamma} \vdash \mathsf{coh}_{\overline{\Gamma}, t \xrightarrow[A]{} u} : t \xrightarrow[A]{} u}$$

- Cohérences d'égalité

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{Var}} t : A \qquad \overline{\Gamma} \vdash_{\mathsf{Var}} u : A}{\overline{\Gamma} \vdash \mathsf{coh}_{\overline{\Gamma}, t \xrightarrow[A]{} u} : t \xrightarrow[A]{} u}$$