Automatisation partielle de preuves dans CaTT

l'exemple de la suspension

Samuel Mimram, Thibaut Benjamin

Ecole Polytechnique

JFLA - 31/01/2019

Notre but

- Le langage CaTT

Notre but

- Le langage CaTT
  - ω-categories : une opération donnée est-elle bien définie ?

Notre but

- Le langage CaTT
  - ω-categories : une opération donnée est-elle bien définie ?
  - CaTT : langage basé sur un type checker

Notre but

- Le langage CaTT
  - ω-categories : une opération donnée est-elle bien définie ?
  - CaTT : langage basé sur un type checker
  - Chaque expression correspond à une opération. L'expression typecheck si et seulement si l'opération est bien définie

Notre but

- ▷ Le langage CaTT
  - ω-categories : une opération donnée est-elle bien définie ?
  - CaTT : langage basé sur un type checker
  - Chaque expression correspond à une opération.
    L'expression typecheck si et seulement si l'opération est bien définie
- ▷ Preuves en CaTT : très longues et redondantes

Notre but

- Le langage CaTT
  - ω-categories : une opération donnée est-elle bien définie ?
  - CaTT : langage basé sur un type checker
  - Chaque expression correspond à une opération. L'expression typecheck si et seulement si l'opération est bien définie
- Preuves en CaTT : très longues et redondantes
  - On propose d'automatiser des parties : Suspension

Le langage CaTT

https://thiben.github.io/catt/

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Le langage CaTT

https://thiben.github.io/catt/

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Le langage CaTT

https://thiben.github.io/catt/

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Nom de la cohérence
comp

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Le langage CaTT

`https://thiben.github.io/catt/`

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Diagramme

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Nom de la cohérence
comp

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Le langage CaTT

`https://thiben.github.io/catt/`

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

Type de retour

$$x \longrightarrow z$$

Diagramme

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

Nom de la cohérence
comp

Mot-clé : déclaration d'une cohérence

Le langage CaTT

`https://thiben.github.io/catt/`

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$\overset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \overset{y}{\bullet} \xrightarrow{g} \overset{z}{\bullet} \rightsquigarrow \overset{x}{\bullet} \xrightarrow{comp} \overset{z}{\bullet}$$

Le langage CaTT

https://thiben.github.io/catt/

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{y}{\bullet} \arrow[r, "g"] & \overset{z}{\bullet} \arrow[r, squiggly] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r, "comp"] & \overset{z}{\bullet} \end{tikzcd}$$

```
coh id (x:*) : x->x
```

Le langage CaTT

https://thiben.github.io/catt/

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z):x->z
```

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{y}{\bullet} \arrow[r, "g"] & \overset{z}{\bullet} \arrow[r, squiggly] & \overset{x}{\bullet} \arrow[r, "comp"] & \overset{z}{\bullet} \end{tikzcd}$$

```
coh id (x:*) : x->x
```

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[r, squiggly] & \overset{x}{\bullet} \arrow[loop above, "id"] \end{tikzcd}$$

Plan

Des points, des flèches, etc

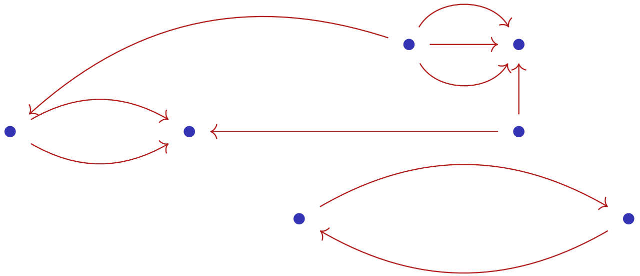
Une ω-catégorie est une structure constituée

Des points, des flèches, etc

Une ω-catégorie est une structure constituée de *points*

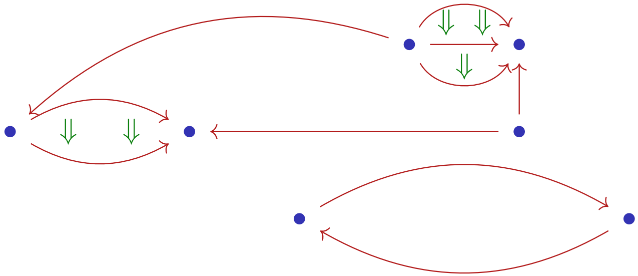
Des points, des flèches, etc

Une ω-catégorie est une structure constituée de *points* , de *flèches*



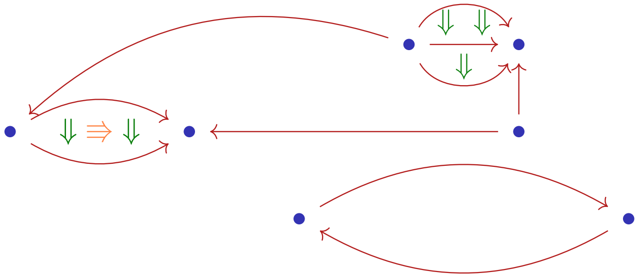
Des points, des flèches, etc

Une ω-catégorie est une structure constituée de *points* , de *flèches* , de 2-*cellules*



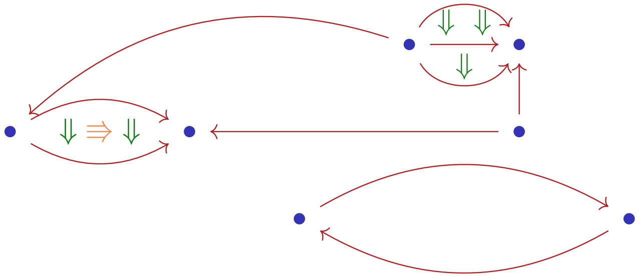
Des points, des flèches, etc

Une ω-catégorie est une structure constituée de *points* , de *flèches* , de 2-*cellules*, de 3-*cellules*



Des points, des flèches, etc

Une ω-catégorie est une structure constituée de *points* , de *flèches* , de 2-*cellules*, de 3-*cellules* etc



Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

- 2-cellules :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D] & \bullet \end{tikzcd} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=B, above}] \arrow[Rightarrow, from=A, to=B] & \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=E, above}] \arrow[Rightarrow, from=C, to=E] & \bullet \end{tikzcd}$$

Des compositions ...

Ces cellules doivent pouvoir se composer

- flèches :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

- 2-cellules :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D] & \bullet \end{tikzcd} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=B, above}] \arrow[Rightarrow, from=A, to=B] & \bullet \arrow[r, bend left, ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=E, above}] \arrow[Rightarrow, from=C, to=E] & \bullet \end{tikzcd}$$

- etc

… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

… associatives …

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

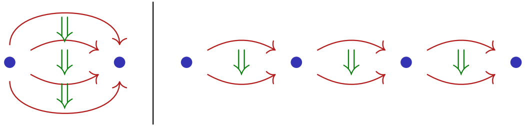
... associatives ...

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :

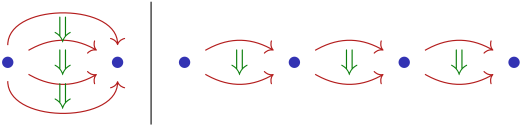


… associatives …

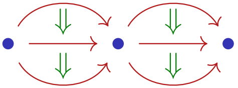
Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

- 2-cellules :



- loi d'échange :



... associatives ...

Les compositions doivent vérifier des conditions d'associativité

- flèches :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- 2-cellules :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=80] \arrow[r, bend left=25] \arrow[r, bend right=25] \arrow[r, bend right=80] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad\Bigg|\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

- loi d'échange :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

- etc

... faiblement !

Toutes les "égalités", mentionnées précédemment sont faibles

Diagrammes de composition

- Diagrammes entièrement composables

Diagrammes de composition

- Diagrammes entièrement composables
- Ils sont ***acycliques*** et ***sans trous***

Diagrammes de composition

- Diagrammes entièrement composables
- Ils sont ***acycliques*** et ***sans trous***

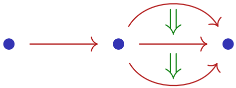
Exemple

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

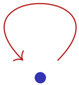
Diagrammes de composition

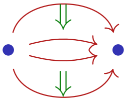
- Diagrammes entièrement composables
- Ils sont ***acycliques*** et ***sans trous***

Exemple



Contre-exemple





Reformulation

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

Reformulation

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales :
  Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales

Plan

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\to$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \to u}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\to$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \to u}$$

- d'un type $\Rightarrow$ pour les 2-cellules :

$$\frac{\Gamma \vdash f : t \to u \qquad \Gamma \vdash g : t \to u}{\Gamma \vdash f \Rightarrow g}$$

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\to$ pour les flèches :

$$\frac{\Gamma \vdash t : \star \qquad \Gamma \vdash u : \star}{\Gamma \vdash t \to u}$$

- d'un type $\Rightarrow$ pour les 2-cellules :

$$\frac{\Gamma \vdash f : t \to u \qquad \Gamma \vdash g : t \to u}{\Gamma \vdash f \Rightarrow g}$$

- etc

Des types pour les cellules

L'objectif est de manipuler des ω-catégories à l'aide de la théorie est types. On a donc besoin

- d'un type $\star$ pour les objets :

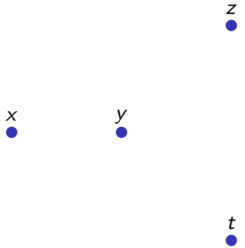
$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star}$$

- d'un type $\to$ pour les $\geq$ 1-cellules

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t \underset{A}{\to} u}$$

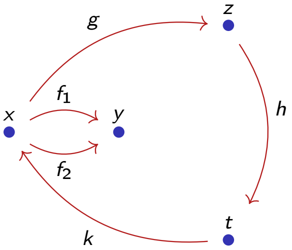
Les contextes sont des diagrammes !

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{llll} x : \star, & y : \star, & z : \star, & t : \star \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$



Les contextes sont des diagrammes !

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{lllll} x : \star, & y : \star, & z : \star, & t : \star & \\ f_1 : x \underset{\star}{\to} y, & f_2 : x \underset{\star}{\to} y, & g : x \underset{\star}{\to} z, & h : z \underset{\star}{\to} t, & k : t \underset{\star}{\to} x \\ & & & & \end{array} \right.$$



Les contextes sont des diagrammes !

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{lllll}
x : \star, & y : \star, & z : \star, & t : \star & \\
f_1 : x \underset{\star}{\to} y, & f_2 : x \underset{\star}{\to} y, & g : x \underset{\star}{\to} z, & h : z \underset{\star}{\to} t, & k : t \underset{\star}{\to} x \\
\alpha : f_1 \xrightarrow[x \underset{\star}{\to} y]{} f_2 & & & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & z \arrow[dd, bend left, "h"] \\
x \arrow[urr, bend left, "g"] \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y & \\
& & t \arrow[ull, bend left, "k"]
\end{tikzcd}
$$

Contextes de composition

- Ce sont les contextes qui correspondent à des diagrammes de composition

Contextes de composition

- Ce sont les contextes qui correspondent à des diagrammes de composition
- Décidable, avec une jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

$$\frac{}{x : \star \vdash_{\mathrm{ps}} x : \star} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} x : A}{\Gamma, y : A, f : x \underset{A}{\to} y \vdash_{\mathrm{ps}} f : x \underset{A}{\to} y}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} f : x \underset{A}{\to} y}{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} y : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} x : \star}{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}}$$

Exemple

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} \underline{x} : \star, \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Exemple

$$\Gamma \left\{ \; x : \star, \quad y : \star, \quad \underline{f_1} : x \underset{\star}{\to} y, \right.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "\underline{f_1}"] & & y \end{tikzcd}$$

Exemple

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} x : {\star}, \quad y : {\star}, \quad f_1 : x \underset{\star}{\to} y, \\ \qquad\qquad\qquad\quad f_2 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \underline{\alpha} : f_1 \xrightarrow[x \underset{\star}{\to} y]{} f_2, \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, "f_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \underline{\alpha}"] & & y \end{tikzcd}$$

Exemple

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} x : \star, \quad y : \star, \quad f_1 : x \underset{\star}{\to} y, \\[1em] \qquad\qquad\quad \underline{f_2} : x \underset{\star}{\to} y, \quad \alpha : f_1 \xrightarrow[x \underset{\star}{\to} y]{} f_2, \\[6em] \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, "\underline{f_2}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & y \end{tikzcd}$$

Exemple

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{l}
x : \star, \quad y : \star, \quad f_1 : x \xrightarrow[\star]{} y, \\[2em]
\qquad\qquad\qquad\quad f_2 : x \xrightarrow[\star]{} y, \quad \alpha : f_1 \xrightarrow[x \xrightarrow[\star]{} y]{} f_2, \\[2em]
\qquad\qquad\qquad\quad f_3 : x \xrightarrow[\star]{} y, \quad \underline{\beta} : f_2 \xrightarrow[x \xrightarrow[\star]{} y]{} f_3, \\[4em]
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f_1"{name=A}] \arrow[r, "f_2" description, ""{name=B}] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'{name=C}] & y
\arrow[from=A, to=B, phantom, "\Downarrow \alpha"]
\arrow[from=B, to=C, phantom, "\Downarrow \underline{\beta}"]
\end{tikzcd}
$$

Exemple

$$\Gamma\left\{\begin{array}{lll} x:\star, \quad y:\star, & f_1 : x \underset{\star}{\to} y, & \\[2ex] & f_2 : x \underset{\star}{\to} y, & \alpha : f_1 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_2, \\[2ex] & \underline{f_3} : x \underset{\star}{\to} y, & \beta : f_2 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_3, \\[4ex] \end{array}\right.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right=60, "\underline{f_3}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta"] & y \end{tikzcd}$$

Exemple

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{lll}
x : \star, \quad \underline{y} : \star, & f_1 : x \underset{\star}{\to} y, & \\
& f_2 : x \underset{\star}{\to} y, & \alpha : f_1 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_2, \\
& f_3 : x \underset{\star}{\to} y, & \beta : f_2 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_3,
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=60, "f_1"] \arrow[rr, "f_2" description] \arrow[rr, bend right=60, "f_3"'] & \arrow[phantom, u, shift left, "\Downarrow \alpha"] \arrow[phantom, d, shift left, "\Downarrow \beta"] & \underline{y}
\end{tikzcd}
$$

Exemple

$$\Gamma \begin{cases} x : \star, \quad y : \star, \quad f_1 : x \underset{\star}{\to} y, \\[2ex] \qquad\qquad f_2 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \alpha : f_1 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_2, \\[2ex] \qquad\qquad f_3 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \beta : f_2 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_3, \\[2ex] \quad z : \star, \quad \underline{g} : y \underset{\star}{\to} z \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta"] & y \arrow[r, "\underline{g}"] & z \end{tikzcd}$$

Exemple

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{l}
x : \star, \quad y : \star, \quad f_1 : x \underset{\star}{\to} y, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad f_2 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \alpha : f_1 \xrightarrow[x \underset{\star}{\to} y]{\qquad} f_2, \\[4ex]
\qquad\qquad\qquad f_3 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \beta : f_2 \xrightarrow[x \underset{\star}{\to} y]{\qquad} f_3, \\[4ex]
\qquad \underline{z} : \star, \quad g : y \underset{\star}{\to} z
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & \underline{z}
\end{tikzcd}
$$

Exemple

$$
\Gamma \left\{
\begin{array}{l}
x : \star, \quad y : \star, \quad f_1 : x \underset{\star}{\to} y, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad f_2 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \alpha : f_1 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_2, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad f_3 : x \underset{\star}{\to} y, \quad \beta : f_2 \underset{x \underset{\star}{\to} y}{\longrightarrow} f_3, \\[2ex]
\qquad z : \star, \quad g : y \underset{\star}{\to} z
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & z
\end{tikzcd}
$$

Source et but

Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)

Exemple :

$$\Gamma \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f_1"{name=A}] \arrow[r, "f_2"{name=B, description}] \arrow[r, bend right=60, "f_3"'{name=C}] & y \arrow[r, "g"] & z \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\alpha"] \arrow[Rightarrow, from=B, to=C, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Source et but

Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)

Exemple :

$$\begin{tikzcd}
\partial^-(\Gamma) & x \arrow[r, bend left, "f_1"] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, rightsquigarrow] & z \\
\Gamma & x \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, "f_2" description] \arrow[r, bend right, "f_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & y \arrow[r, "g"] & z
\end{tikzcd}$$

Source et but

Tout contexte de composition Γ vient avec une source $\partial^-(\Gamma)$ et un but $\partial^+(\Gamma)$ (eux-même des contextes de composition)

Exemple :

$$\begin{tikzcd}
\partial^-(\Gamma) & x \arrow[rr, bend left, "f_1"] & & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, squiggly] & z \\
\Gamma & x \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, "f_2" description] \arrow[rr, bend right, "f_3"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\beta"] & & y \arrow[r, "g"] & z \\
\partial^+(\Gamma) & x \arrow[rr, bend right, "f_3"'] & & y \arrow[r, "g"] \arrow[u, squiggly] & z
\end{tikzcd}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

  Règle pour générer les témoins de telles compositions :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

  Règle pour générer les témoins de telles compositions :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\to} u} : t \underset{A}{\to} u}$$

  Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\to} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\to} z$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{comp} : x \to z$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

  Règle pour générer les témoins de telles compositions :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\to} u} : t \underset{A}{\to} u}$$

  Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\to} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\to} z$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{comp} : x \to z$$

  NB : Condition de bord sur l'utilisation des variables

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales : ***Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales***

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

- "Associativités" générales : ***Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales***

  Règle pour générer les témoins de telles associativités :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable

- "Associativités" générales : ***Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales***

  Règle pour générer les témoins de telles associativités :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

  Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\to} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\to} z, w : \star, h : z \underset{\star}{\to} w$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{assoc} : \mathtt{comp\ f\ (comp\ g\ h)} \to \mathtt{comp\ (comp\ f\ g)\ h}$$

Cohérences

- Existence des compositions :
  Tout diagramme de composition est composable
- "Associativités" générales : ***Toutes les façons de composer un même diagramme de composition sont faiblement égales***

  Règle pour générer les témoins de telles associativités :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

Exemple :

$$\Gamma = x : \star, y : \star, f : x \underset{\star}{\rightarrow} y, z : \star, g : y \underset{\star}{\rightarrow} z, w : \star, h : z \underset{\star}{\rightarrow} w$$

$$\Gamma \vdash \mathtt{assoc} : \mathtt{comp\ f\ (comp\ g\ h)} \rightarrow \mathtt{comp\ (comp\ f\ g)\ h}$$

NB : Condition de bord sur l'utilisation des variables

Exemples

- Composition des morphismes

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z
```

$$\begin{tikzcd} \underset{x}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \underset{y}{\bullet} \arrow[r, "g"] & \underset{z}{\bullet} \arrow[r, squiggly] & \underset{x}{\bullet} \arrow[r, "comp\ f\ g"] & \underset{z}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Exemples

- Composition des morphismes

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z
```

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "g"] & z \arrow[r, squiggly] & x \arrow[r, "comp\ f\ g"] & z \end{tikzcd}$$

- Identité

```
coh id (x:*) : x->x
```

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, squiggly] & x \arrow[loop above, "id\ x"] \end{tikzcd}$$

Exemples

▷ Composition des morphismes

```
coh comp (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z) : x->z
```

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "g"] & z \arrow[r, rightsquigarrow] & x \arrow[r, "comp\ \ f\ \ g"] & z \end{tikzcd}$$

▷ Identité

```
coh id (x:*) : x->x
```

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, rightsquigarrow] & x \arrow[loop above, "id\ \ x"] \end{tikzcd}$$

▷ Associativité

```
coh assoc (x:*)(y:*)(f:x->y)(z:*)(g:y->z)
          (w:*)(h:z->w) :
    comp (comp f g) h -> comp f (comp g h)
```

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "g"] & z \arrow[r, "h"] & w \arrow[r, rightsquigarrow] & x \arrow[r, bend left, "comp\ \ (comp\ \ f\ \ g)\ \ h", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "comp\ \ f\ \ (comp\ \ g\ \ h)"', ""{name=D}] & z \arrow[from=U, to=D, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Plan

Remarque : identités des n-cellules

Avec le système que l'on vient de décrire, on peut introduire :

- L'identité des objets :

```
coh id0 (x:*) : x -> x
```

Remarque : identités des n-cellules

Avec le système que l'on vient de décrire, on peut introduire :

- L'identité des objets :

  ```
  coh id0 (x:*) : x -> x
  ```

- L'identité des flèches :

  ```
  coh id1 (x:*)(y:*)(f:x->y) : f->f
  ```

Remarque : identités des n-cellules

Avec le système que l'on vient de décrire, on peut introduire :

- L'identité des objets :

```
coh id0 (x:*) : x -> x
```

- L'identité des flèches :

```
coh id1 (x:*)(y:*)(f:x->y) : f->f
```

- L'identité des 2-cellules :

```
coh id2 (x:*) (y:*) (f:x->y)
                    (g:x->y) (a:f->g) : a->a
```

Remarque : identités des n-cellules

Avec le système que l'on vient de décrire, on peut introduire :

- L'identité des objets :

  ```
  coh id0 (x:*) : x -> x
  ```

- L'identité des flèches :

  ```
  coh id1 (x:*)(y:*)(f:x->y) : f->f
  ```

- L'identité des 2-cellules :

  ```
  coh id2 (x:*) (y:*) (f:x->y)
                      (g:x->y) (a:f->g) : a->a
  ```

- etc

Idée

- Toutes les cohérences dérivables dans une dimension donnée sont aussi dérivables dans les dimensions supérieures.

  Exemples :

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] \\
\bullet
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Idée

- Toutes les cohérences dérivables dans une dimension donnée sont aussi dérivables dans les dimensions supérieures.
- Cela mène à des preuves très redondantes : il faut refaire "les mêmes" développements en plusieurs dimension

Idée

- Toutes les cohérences dérivables dans une dimension donnée sont aussi dérivables dans les dimensions supérieures.
- Cela mène à des preuves très redondantes : il faut refaire "les mêmes" développements en plusieurs dimension
- La *suspension* résout ce problème en automatisant ce procédé

Suspension des contextes

- Partant d'un contexte Γ, on définit un contexte $\Sigma\Gamma$. **Toute cellule de dimension n dans Γ est donne une cellule de dimension $n+1$ dans $\Sigma\Gamma$**

  Exemple :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[d] \\ \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=huge] \bullet \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M, above}, ""{name=N, below}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=N, to=D] \end{tikzcd}$$

Suspension des contextes

- Partant d'un contexte Γ, on définit un contexte $\Sigma\Gamma$. **Toute cellule de dimension n dans Γ est donne une cellule de dimension $n+1$ dans $\Sigma\Gamma$**
- Définition inductive
  contextes :

$$\Sigma\varnothing = a : \star, b : \star \qquad \Sigma(\Gamma, x : A) = (\Sigma\Gamma, x : \Sigma A)$$

types :

$$\Sigma\star = a \underset{\star}{\to} b \qquad \Sigma(t \underset{A}{\to} u) = \Sigma t \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} \Sigma u$$

termes :

$$\Sigma x = x \qquad \Sigma \mathrm{coh}_{\Gamma, A} = \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma, \Sigma A}$$

Théorème

La règle suivante est admissible

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma(\mathsf{coh}_{\Gamma,A}) : \Sigma A}$$

Toute cohérence dérivable dans un contexte engendre une cohérence dans le contexte suspendu

Théorème

La règle suivante est admissible

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma(\mathrm{coh}_{\Gamma,A}) : \Sigma A}$$

Toute cohérence dérivable dans un contexte engendre une cohérence dans le contexte suspendu

Au passage : les règles suivantes sont aussi admissibles

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Sigma\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A}$$

Utilisation pratique

- Supposons bien défini un terme $t = \mathsf{coh}_{\Gamma,A}$ dans notre système.
  $\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A}$ est dérivable

Utilisation pratique

- Supposons bien défini un terme $t = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$ dans notre système.
  $\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$ est dérivable
- Si l'on souhaite appliquer la cohérence suspendue, il suffit d'écrire t suivi des arguments que l'on veut mettre, et le système détectera automatiquement qu'il doit suspendre

Utilisation pratique

- Supposons bien défini un terme $t = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$ dans notre système.
  $\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$ est dérivable
- Si l'on souhaite appliquer la cohérence suspendue, il suffit d'écrire t suivi des arguments que l'on veut mettre, et le système détectera automatiquement qu'il doit suspendre
- Le calcul pour générer Σt s'effectue, et une dérivation du jugement $\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A}$ est calculée. Cela permet d'utiliser ce nouveau terme à la place de l'ancien.

Pour aller plus loin...

Une autre automatisation a été envisagée : la ***fonctorialisation***
Une opération similaire, partiellement définie, prouvée et implémentée.
Pour la prouver d'une facon plus générale, des développements théoriques sont nécessaires

Théorème

L'objectif est de montrer la règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma(\mathrm{coh}_{\Gamma,A}) : \Sigma A}$$

Toute cohérence dérivable dans un contexte engendre une cohérence dans le contexte suspendu

Théorème

L'objectif est de montrer la règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma(\mathsf{coh}_{\Gamma,A}) : \Sigma A}$$

Toute cohérence dérivable dans un contexte engendre une cohérence dans le contexte suspendu

Au passage : les règles suivantes seront aussi montrées admissibles

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Sigma\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A}$$

Pour les contextes de composition

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}$$

Pour les contextes de composition

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}$$

Idée de preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation, on montre la règle (plus générale)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : A}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : \Sigma A}$$

Pour les contextes de composition

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}$$

Idée de preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation, on montre la règle (plus générale)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : A}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : \Sigma A}$$

- *Initialisation :*

$$\frac{}{x : \star \vdash_{\mathsf{ps}} x : \star}$$

$\Sigma(x : \star) = a : \star, b : \star, x : a \underset{\star}{\to} b$, on peut construire à la main une dérivation de $\Sigma(x : \star) \vdash_{\mathsf{ps}} x : a \underset{\star}{\to} b$

Pour les contextes de composition

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}$$

Idée de preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation, on montre la règle (plus générale)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : A}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : \Sigma A}$$

- *Itération (1) :*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} f : x \underset{A}{\longrightarrow} y}{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} y : A}$$

On construit une dérivation de $\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} y : \Sigma A$ à partir de la dérivation obtenue par induction de $\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} f : x \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} y$

Pour les contextes de composition

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}}$$

Idée de preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation, on montre la règle (plus générale)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : A}{\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : \Sigma A}$$

- *Itération (2) :*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : A}{\Gamma, y : A, f : x \underset{A}{\longrightarrow} y \vdash_{\mathsf{ps}} f : x \underset{A}{\longrightarrow} y}$$

$\Sigma(\Gamma, y : A, f : x \underset{A}{\longrightarrow} y) = \Sigma\Gamma, y : \Sigma A, f : x \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} y$, et on construit $\Sigma(\Gamma, y : A, f : x \underset{A}{\longrightarrow} y) \vdash_{\mathsf{ps}} f : x \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} y$ à partir de $\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} x : \Sigma A$

Suspension et bords

Les équations suivantes peuvent aussi être prouvées

$$\partial^-(\Sigma\Gamma) = \Sigma(\partial^-(\Gamma)) \qquad \partial^+(\Sigma\Gamma) = \Sigma(\partial^+(\Gamma))$$

Preuve mutuellement inductive

Finalement, on prouve par induction mutuelle les règles admissibles

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Sigma\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A} \qquad \frac{\Gamma \vdash v : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma v : \Sigma A}$$

Preuve mutuellement inductive

Finalement, on prouve par induction mutuelle les règles admissibles

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Sigma\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A} \qquad \frac{\Gamma \vdash v : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma v : \Sigma A}$$

Ici, on ne s'intéressera qu'à la dernière règle, avec v une cohérence

Preuve mutuellement inductive

Finalement, on prouve par induction mutuelle les règles admissibles

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Sigma\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A} \qquad \frac{\Gamma \vdash v : A}{\Sigma\Gamma \vdash \Sigma v : \Sigma A}$$

Ici, on ne s'intéressera qu'à la dernière règle, avec v une cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

Par la preuve sur les contextes de composition

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^{-}(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^{+}(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

Par induction, on dérive
$\Sigma(\partial^-(\Gamma)) \vdash \Sigma t : \Sigma A$
$\Sigma(\partial^+(\Gamma)) \vdash \Sigma u : \Sigma A$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

$\Sigma(\partial^-(\Gamma)) \vdash \Sigma t : \Sigma A$

$\Sigma(\partial^+(\Gamma)) \vdash \Sigma u : \Sigma A$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

▷ $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

$\partial^-(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma t : \Sigma A$

$\partial^+(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma u : \Sigma A$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$
$\partial^-(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma t : \Sigma A$
$\partial^+(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma u : \Sigma A$

Cela permet de dériver

$$\Sigma\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Sigma\Gamma, \Sigma t \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} \Sigma u} : \Sigma t \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} \Sigma u$$

Première règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u}$, obtenu par la première règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \partial^-(\Gamma) \vdash t : A \qquad \partial^+(\Gamma) \vdash u : A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma, t \underset{A}{\longrightarrow} u} : t \underset{A}{\longrightarrow} u}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

$\partial^-(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma t : \Sigma A$

$\partial^+(\Sigma\Gamma) \vdash \Sigma u : \Sigma A$

Cela permet de dériver

$\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma, \Sigma t \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} \Sigma u} : \Sigma t \underset{\Sigma A}{\longrightarrow} \Sigma u$

NB : Condition de variables vérifiées

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

> Par la preuve sur les contextes de composition $\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathsf{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathsf{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$

Par induction, on dérive $\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A$

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}$
$\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A$

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$
$\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A$

Cela permet de dériver
$\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A$

Seconde règle de cohérence

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$

- $v = \mathrm{coh}_{\Gamma,A}$, obtenu par la seconde règle

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}$$

$\Sigma\Gamma \vdash_{\mathrm{ps}}$
$\Sigma\Gamma \vdash \Sigma A$

Cela permet de dériver
$\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A$

NB : Condition de variables vérifiées

Résultat

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Gamma,A} : A}{\Sigma\Gamma \vdash \mathrm{coh}_{\Sigma\Gamma,\Sigma A} : \Sigma A}$$